Hajdú–Bihar megyei középiskolások matematika versenye, 2019/2020
– 10. évfolyam, megoldókulcs –

---

1. feladat

Legyen a szabályos hatszög köré írt kör sugarának hossza r, ami egyben a szabályos hatszög oldalának hossza is. *2 pont*

A szabályos hatszög hat olyan egybevágó szabályos háromszögből áll, amelyek oldalhossza r. *2 pont*

A hatszög egyik rövidebb átlója mentén levágott háromszög két ilyen, szomszédos háromszögből van levágva, és mivel ennek a két háromszögnek az egyesítése rombusz, a levágott háromszög területe fele a két háromszög egyesítése területének, azaz egyenlő az egyik háromszög területével. *4 pont*

Tehát a levágott háromszög területe $t = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. *1 pont*

Ebből $r^2 = \frac{4t}{\sqrt{3}}$, *1 pont*

a keresett terület $r^2\pi = \frac{4t\pi}{\sqrt{3}}$. *1 pont*

Összesen: 11 pont

2. feladat

A feltételnek megfelelő szám első számjegye nyilván az 1, *1 pont*

és a 0 számjegyeket legalább egy 1-es számjegy elválasztja, tehát a feltételnek megfelelő szám egy része 10101010 alakú, ami csak úgy változik, hogy még négy 1-es számjegyet beiktatunk ezen számjegyekhez, vagy az 1-esek mellé, vagy a végére. *2 pont*

Ha a beiktatásra szánt négy db. 1-est ugyanarra a helyre tesszük, az 5 lehetőség. *1 pont*

Ha 3+1 bontásban tesszük, akkor a sorrend is számít, így az 5 . 4 = 20 lehetőség. *2 pont*

Ha 2+2 bontásban tesszük, akkor a sorrend nem számít, így az 10 lehetőség. *1 pont*

Ha 2+1+1 bontásban tesszük, akkor az 5 . 6 = 30 lehetőség. *2 pont*

Ha 1+1+1+1 bontásban tesszük, akkor az 5 lehetőség. *1 pont*

Összesen 70 lehetőség. *1 pont*

Összesen: 11 pont

3. feladat

Az egyenlet ekvivalens átalakítások után:

$x^2 + 4x^2 + y^2 + 9y^2 + z^2 + 4 = 4zx + 3xy + 3xy + 4y$ *2 pont*

$z^2 - 4xz + 4x^2 + x^2 - 6xy + 9y^2 + y^2 - 4y + 4$ *2 pont*

$(z - 2x)^2 + (x - 3y)^2 + (y - 2)^2 = 0$ *3 pont*

Nemnegatív számok összege pontosan akkor 0, ha mindegyik összeadandó 0. *2 pont*

Tehát a megoldások:

$y = 2,$ *1 pont*

$x = 3y,\ x = 6,$ *1 pont*

$z = 2x,\ z = 12.$ *1 pont*

Összesen: 12 pont

4. feladat

$BAC\sphericalangle = 180° - 45° - 75° = 60°.$ *2 pont*
Így $BAD\sphericalangle = DAC\sphericalangle = 30°.$ *2 pont*
Tehát $ADC\sphericalangle = 75°$, az $ADC\triangle$ egyenlő szárú: $AD = AC = 10.$ *2 pont*
Legyen az AD szakasz felezőpontja E, az EF egyenes és az AB oldal metszéspontja H. Így $AEH\sphericalangle = DEF\sphericalangle = 60°$. és $EFA\sphericalangle = 30°.$ *2 pont*
Másrészt $DAC\sphericalangle = 30° = EFA\sphericalangle$, így az $AEF\triangle$ egyenlő szárú: $AE = EF$. *2 pont*
Így $EF = ED$ és $DEF\sphericalangle = 60°$ miatt $DEF\triangle$ szabályos háromszög.
Tehát $DF = DE = 5$ *2 pont*
Összesen: 12 pont

5. feladat

A bizonyítást a teljes indukció módszerével végezzük. $n = 4$ esetén nyilván igaz az állítás. *1 pont*
Tegyük fel, hogy igaz valamelyik $n > 3$ számnál kisebb vagy egyenlő egész számra. *1 pont*
Bebizonyítjuk, hogy akkor igaz $n+1$-re is. Az $n+1$ pont közül egyet - jelöljük ezt A-val - elhagyva, a többire igaz, hogy közülük legalább $n-1$ pont egy, e-vel jelölt egyenesen van.
Ha az e egyenesen mind az n pont rajta van, vagy csak $n-1$, de az A is, akkor az $n+1$ számú pontra teljesül a feltétel. *4 pont*
Ha ezen az e egyenesen csak $n-1$ pont van rajta, és az A sincs rajta, tehát a vizsgált $n+1$ pont közül az A- kivül a B-vel jelölt pont sincs rajta e-n, akkor az e-n levő $n-1$ pont között van olyan C és D pont, amelyek nincsenek az AB egyenesen. Hiszen $n-1$ legalább 3, és ezek közül marad legalább kettő, mert az AB-n az e egyenesnek legfeljebb egy pontja lehet. *4 pont*
Az A, B, C, D pontok közül nincs három, amelyek egy egyenesre esnek, mert ez az egyenes vagy AB, vagy CD egyenese, amelyekre a másik két pont egyike sem esik. *1 pont*
Ez ellenkezik a feltétellel, így az e egyenesen lenni kell n pontnak az $n+1$ közül. *1 pont*
Összesen: 14 pont